-15- 集合と命題

セット2

主な範囲……［数Ⅰ］集合と命題

【集合】

1．50人のクラスで，犬を飼っている人は22人，猫を飼っている人は15人，どちらも飼っていない人が18人いる．両方とも飼っている人は $\boxed{\text{ア}}$ 人，犬だけ飼っている人は $\boxed{\text{イ}}$ 人である．

（13　帝京大・理工，薬）

2．集合 A，B が全体集合 $\{n \mid n$ は自然数，$n<10\}$ の部分集合で，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,\ 4\}$，$\overline{A}\cap B=\{8\}$，$A\cap\overline{B}=\{1,\ 5,\ 7\}$ とするとき，$A\cap B=\{\boxed{}\}$ である．

（13　文教大）

3．実数全体の集合の部分集合 A，B を

$$A=\left\{x \,\middle|\, x^2-\frac{5}{6}x\leqq 1\right\},\ B=\{x \mid x^2+x<1\}$$

とする．また，A の補集合を $\overline{A}$ とする．このとき，

$\overline{A}=\{x \mid x<\boxed{}$ または $x>\boxed{}\}$

$A\cup B=\{x \mid \boxed{}<x\leqq\boxed{}\}$

$\overline{A}\cap B=\{x \mid \boxed{}<x<\boxed{}\}$

である．

（13　松山大・経済，経営）

4．実数全体の集合を全体集合とする．

$A=\{x \mid x^2-x-2>0\}$，$B=\{x \mid x^2-ax<0\}$

とするとき，$A\cap B$ が空集合となるような定数 a の値の範囲は，$\boxed{}$ である．

（13　常葉学園大／空欄の形を変更）

【命題】

5．次の6つの命題およびそれらの逆命題について，真偽を答えよ．ただし，a，b は実数とする．

（1）「ab が無理数ならば，a，b はともに無理数である．」は $\boxed{}$，逆命題は $\boxed{}$．

（2）「$0<a<1$ ならば，$a^2<a$ である．」は $\boxed{}$，逆命題は $\boxed{}$．

（3）「$ab=0$ ならば，$a^2+b^2=0$ である．」は $\boxed{}$，逆命題は $\boxed{}$．

（4）「n が6で割ると1余る自然数ならば，n は3で割ると1余る自然数である．」は $\boxed{}$，逆命題は $\boxed{}$．

（5）「$a\neq b$ ならば，$a^2-2ab+b^2>0$ である．」は $\boxed{}$，逆命題は $\boxed{}$．

（6）「$a=b$ ならば，$a^2-b^2=0$ である．」は $\boxed{}$，逆命題は $\boxed{}$．

（13　上武大）

6．a，b を実数とする．命題「$ab=0$ ならば，$a=0$ かつ $b=0$」の逆と対偶を書き，それぞれの真偽を答えよ．

（13　鹿児島大）

7．次の命題（1），（2）の逆，裏，対偶をそれぞれ書け．また，元の命題，逆，裏，対偶の真偽をそれぞれ答えよ．

（1）$\sqrt{n}$ が有理数ならば n は有理数である．

（2）n を整数とする．n が奇数ならば n^2 は奇数である．

（13　鳥取環境大）

【必要条件・十分条件】

8〜10と11.（2）は，空欄に適するものを①〜④から選べ．

① 必要十分条件である

② 必要条件であるが，十分条件ではない

③ 十分条件であるが，必要条件ではない

④ 必要条件でも十分条件でもない

8．（1）四角形ABCDにおいて，「四角形ABCDが平行四辺形である．」は，「辺ABと辺DCは平行である．」ための $\boxed{}$．

（2）x，y を実数とするとき，「$x+y\geqq 2$」は，「x，y の少なくとも一方が2以上である．」ための $\boxed{}$．

（13　杏林大・外，総政）

9．（1）x が偶数であることは，x が整数であるための $\boxed{}$．

（2）三角形ABCのどれかひとつの辺の長さの2乗がのこりの2辺の長さの2乗の和に等しいことは，三角形ABCが直角三角形であるための $\boxed{}$．

（3）x，y がともに有理数のとき，$y>2x^2$ であることは，$y>x^2-2x-2$ であるための $\boxed{}$．

（4）四角形ABCDの内角が4つとも 90° であることは，四角形ABCDが正方形であるための $\boxed{}$．

（5） 四角形ABCDの辺の長さがすべて等しいことは，四角形ABCDが長方形であるための□.

（13 鳥取環境大）

10. a，b を正の整数とし，条件 p，q，r，s を次のように定める.

p： a は3で割り切れる
q： b は3で割り切れる
r： ab は3で割り切れる
s： $a+b$ は3で割り切れる

（1） r は p であるための□.
（2） s は q であるための□.
（3）「p かつ q」は s であるための□.
（4）「p または q」は r であるための□.

（13 流通科学大）

11. 実数 x について，つぎのように条件 p～s を定める.

p： $-3<x<0$　　q： $x^2 \geqq 2x$
r： $|x|>x$　　s： $x^2+4x+4 \leqq 0$

（1） 条件 q を満たす x は $x \leqq$□，□$\leqq x$ である.
条件 r を満たす x は $x<$□である.
条件 s を満たす x は $x=$□である.
（2） 条件 p は条件 r であるための□.
（3） 条件 p～s のうちで，□は他のすべての条件の必要条件であり，□は他のすべての条件の十分条件である.　（13 松山大・人文，法）

◎問題の難易と目標時間

難易については，入試問題を10段階に分けたとして，
A（基本）…5以下　　B（標準）…6，7
C（発展）…8，9　　D（難問）…10
また，目標時間は，＊1つにつき10分，◦は5分であり，5分もかからず解いて欲しい問題は無印です.

1…A	2…A	3…A◦	4…A	5…A＊◦
6…A	7…A＊	8…A◦	9…A＊◦	10…A＊
11…A＊◦				

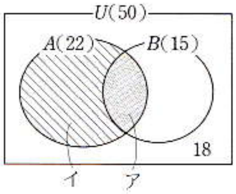
解　　説

1. ベン図に人数を書いていきます. アは，公式

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

を使いますが，注のイメージで覚えるとよいでしょう.

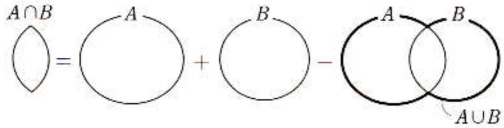
解 クラス全体を U，犬を飼っている人の集合を A，猫を飼っている人の集合を B とする.



ア： $n(A\cup B)$
$=50-18=32$
であるから，網目部は，
$n(A\cap B)$
$=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=22+15-32=5$（人）

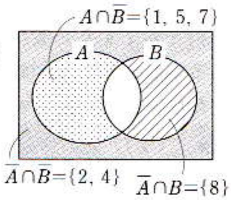
イ： 図の斜線部の人数だから，$22-5=17$（人）

⇨**注** 公式のイメージ：



2. これもベン図を使います. $\overline{A}\cap\overline{B}$ などがベン図のどこにあたるかを考え，要素を書きこんでいくとすべて決まります.

解 $\overline{A}\cap\overline{B}$ は右図の網目部，$\overline{A}\cap B$ は斜線部，$A\cap\overline{B}$ は打点部だから右の図のようになる.
全体が9以下の自然数で，
$A\cap B$ は図の白い部分だから，
$A\cap B=\{3,\ 6,\ 9\}$

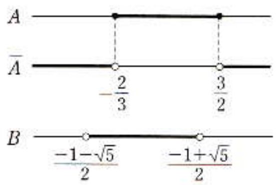


3. まず，2次不等式を解いて A，B を区間の形で表します. これを数直線上に図示すると和集合や共通部分をとらえやすくなります.

解 A について，$6x^2-5x-6=0$ を解くと，
$(2x-3)(3x+2)=0$ より $x=-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{2}$

B について，$x^2+x-1=0$ の解は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\sqrt{5}=2.2\cdots$ より
$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<-\dfrac{2}{3}$
$<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<\dfrac{3}{2}$
となることに注意して
A，$\overline{A}$，B を数直線上に図示すると右のようになる. よって，



$$\overline{A}=\left\{x\,\middle|\,x<-\frac{2}{3}\ \text{または}\ x>\frac{3}{2}\right\}$$

$$A\cup B=\left\{x\,\middle|\,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x\leqq\frac{3}{2}\right\}$$

$$\overline{A}\cap B=\left\{x\,\middle|\,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<-\frac{2}{3}\right\}$$

4. 前問と同様，数直線上に図示します．a の範囲の端点（等号がつくかつかないか）を慎重に考えましょう．

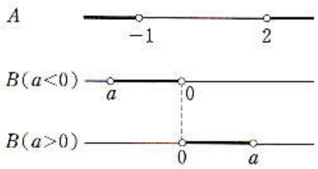
解　A は，$(x-2)(x+1)>0$ より $x<-1$ または $2<x$

B は，$x(x-a)<0$ だから，

　$a<0$ のとき $a<x<0$，$a=0$ のとき $B=\phi$，

　$a>0$ のとき $0<x<a$

　これらを図示すると右のようになるから，$A\cap B$ が空集合となるような定数 a の範囲は，



　$-1\leqq a\leqq 2$

⇨注　$a=-1$，$a=2$ のときに $A\cap B=\phi$ となることを確かめてください．

5. 命題 $p\Longrightarrow q$ の逆命題は $q\Longrightarrow p$ です．元の命題と逆命題の真偽は一致するとは限らないので，それぞれ真偽を判定する必要があります．命題 $p\Longrightarrow q$ が偽であることを示すときは，反例（p が成り立って q が成り立たないもの）を一つあげます．

解　（1）　元の命題は偽．反例は $a=1$，$b=\sqrt{2}$．

　逆命題「a，b がともに無理数ならば，ab は無理数」も偽．反例は $a=b=\sqrt{2}$．

（2）　$a^2<a\Longleftrightarrow a^2-a<0\Longleftrightarrow a(a-1)<0$

　　　　$\Longleftrightarrow 0<a<1$

だから，元の命題は真，逆命題も真

（3）　元の命題は偽．反例は $a=0$，$b=1$．

　逆命題「$a^2+b^2=0$ ならば，$ab=0$」は真．

　証明：　$a^2+b^2=0$ で a，b が実数ならば $a=b=0$ だから $ab=0$．

（4）　元の命題は真．

　証明：　n が 6 で割ると 1 余る自然数のとき，k を 0 以上の整数として $n=6k+1$ とおける．$n=3\cdot 2k+1$ であるから，n を 3 で割った余りは 1．

　逆命題「n が 3 で割ると 1 余る自然数ならば，n は 6 で割ると 1 余る自然数である」は偽．反例は $n=4$．

（5）　$a^2-2ab+b^2>0\Longleftrightarrow (a-b)^2>0\Longleftrightarrow a\neq b$

だから，元の命題は真，逆命題も真．

（6）　元の命題は真．

　逆命題「$a^2-b^2=0$ ならば，$a=b$ である」は偽．反例は $a=1$，$b=-1$．

6. 命題 $p\Longrightarrow q$ の対偶は $\overline{q}\Longrightarrow\overline{p}$，また，「$r$ かつ s」の否定は，「$\overline{r}$ または $\overline{s}$」です．この 2 点は押さえておきましょう．

解　**逆は，「$a=0$ かつ $b=0$ ならば $ab=0$」**で，これは真．

　対偶は，「$a\neq 0$ または $b\neq 0$ ならば $ab\neq 0$」で，これは偽．反例は，$a=0$，$b=1$．

7. $p\Longrightarrow q$ の裏は $\overline{p}\Longrightarrow\overline{q}$ です．（2）では，前提（n を整数とする）は逆，裏，対偶でもそのまま残ります．

解　（1）　**逆：n が有理数ならば $\sqrt{n}$ は有理数である．**

裏：$\sqrt{n}$ が無理数ならば n は無理数である．

対偶：n が無理数ならば $\sqrt{n}$ は無理数である．

　真偽は，元の命題と対偶が真，逆と裏が偽．

　元の命題の証明：　$\sqrt{n}=\dfrac{b}{a}$（a，b は整数で $a\neq 0$）

とおくことができ，このとき $n=\dfrac{b^2}{a^2}$ は有理数．

　逆と裏の反例：　$n=2$

⇨注　逆の対偶は裏なので，両者の真偽は一致します．さらに，一般にある命題が偽のとき，その反例がいつでも対偶命題（偽）の反例になります（つまり，反例が共通だから考えやすいほうで見つければよい）．ですから，本問で逆の反例を見つけたら，改めて裏の反例を考える必要はありません．これも頭に入れておくとよいでしょう．なお，元の命題を証明すれば対偶を証明したことになります．

（2）　**逆：n を整数とする．n^2 が奇数ならば n は奇数である．**

裏：n を整数とする．n が偶数ならば n^2 は偶数である．

対偶：n を整数とする．n^2 が偶数ならば n は偶数である．

　真偽は，すべて真．

　証明：　n が奇数のとき，$n=2k+1$（k は整数）とおけて，$n^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$．これは奇数．

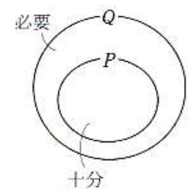
n が偶数のとき，$n=2k$（k は整数）とおけて，

$n^2=4k^2=2\cdot 2k^2$．これは偶数．よって，

　　n が奇数 $\Longleftrightarrow n^2$ が奇数，n が偶数 $\Longleftrightarrow n^2$ が偶数

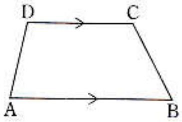
となる．

8. 命題 $p\Longrightarrow q$ が成り立つとき，「p は q であるための十分条件」，「q は p であるための必要条件」です．このとき，真理集合の包含関係は $P\subset Q$ となります．右図をイメージして，「Q に入るためには P に入っていれば十分」のように考えると，必要と十分を逆にするミスを防ぐことができるでしょう．



解　(1)　ABCD が平行四辺形 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ AB // DC

$\Longrightarrow$ は平行四辺形の定義から成り立つ．$\Longleftarrow$ の反例は右図のような平行四辺形でない台形．



であるから，十分だが必要ではない（③）．

(2)　$x+y\geqq 2 \underset{\not\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow} x\geqq 2$ または $y\geqq 2$

$\Longrightarrow$ の反例は $x=1$，$y=1$

$\Longleftarrow$ の反例は $x=2$，$y=-1$

であるから，必要でも十分でもない（④）．

9．前問と同様です．(3)は，$y>2x^2$ を「点$(x,\ y)$が領域 $y>2x^2$ にある」とみて，2つの領域（真理集合）$y>2x^2$，$y>x^2-2x-2$ の包含関係を考えましょう．

解　(1)　x が偶数 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ x が整数

だから，十分だが必要ではない（③）．

(2)　△ABC の3辺の長さを a，b，c とすると，

$c^2=a^2+b^2 \Longleftrightarrow$ △ABC は直角三角形

だから，必要十分（①）．

(3)　[$y=2x^2$ と $y=x^2-2x-2$ の上下を考える]

$2x^2-(x^2-2x-2)$

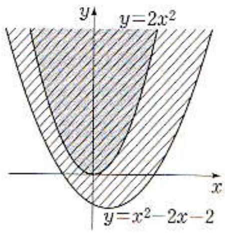
$=x^2+2x+2$

$=(x+1)^2+1>0$

より，$y=2x^2$ は

$y=x^2-2x-2$ の上側にある．

よって，領域 $y>2x^2$（図の網目部）は $y>x^2-2x-2$（斜線部）に含まれ，一致しない．x，y を有理数に限定しても



$$y>2x^2 \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} y>x^2-2x-2$$

だから，十分だが必要ではない（③）．

(4)　四角形について，

内角が4つとも 90° $\underset{\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ 正方形

$\Longrightarrow$ の反例は正方形でない長方形

だから，必要だが十分ではない（②）．

(5)　四角形について，

辺の長さがすべて等しい $\underset{\not\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ 長方形

$\Longrightarrow$ の反例は正方形でないひし形

だから，必要でも十分でもない（④）．

10．これも前と同じです．

解　(1)　ab は3で割り切れる

$\underset{\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ a は3で割り切れる

$\Longrightarrow$ の反例は $a=1$，$b=3$

だから，必要だが十分ではない（②）．

(2)　$a+b$ は3で割り切れる

$\underset{\not\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ b は3で割り切れる

$\Longrightarrow$ の反例は $a=1$，$b=2$

$\Longleftarrow$ の反例は $a=1$，$b=3$

だから，必要でも十分でもない（④）．

(3)　a，b ともに3で割り切れる

$\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $a+b$ は3で割り切れる

$\Longleftarrow$ の反例は $a=1$，$b=2$

だから，十分だが必要ではない（③）．

(4)　a または b が3で割り切れる

$\Longleftrightarrow$ ab は3で割り切れる

$\Longleftarrow$ は，3が素数だから成り立つ

より，必要十分（①）．

11．各条件（の x の範囲）を数直線上に表すと考えやすいでしょう．(3)の「他のすべての条件の必要条件」は，数直線上では「他のすべての条件（区間）を含むもの」で，「他のすべての条件の十分条件」は「他のすべての条件に含まれるもの」です．

解　(1)　条件 $\boldsymbol{q}$ は，

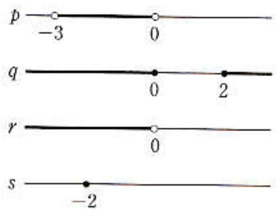
$x^2-2x\geqq 0$　　$\therefore$　$x(x-2)\geqq 0$

であるから，$\boldsymbol{x\leqq 0,\ 2\leqq x}$

条件 $\boldsymbol{r}$ について，$x\geqq 0$ のとき $|x|=x$ で，$x<0$ のとき $|x|>0>x$ であるから，$|x|>x \Longleftrightarrow \boldsymbol{x<0}$

条件 $\boldsymbol{s}$ は $(x+2)^2\leqq 0$ より $\boldsymbol{x=-2}$．

条件 p を含め，それぞれの x の範囲を図示すると右のようになる．



(2)　上の図を見ると p は r に含まれる（一致しない）ので，$p \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} r$

よって，十分だが必要ではない（③）．

(3)　図で q は p，r，s をすべて含むので，$\boldsymbol{q}$ は他のすべての条件の必要条件である．

また，図で s は p，q，r のすべてに含まれるので，$\boldsymbol{s}$ は他のすべての条件の十分条件である．